

*О. П. ПРИЩЕНКО, Т. Т. ЧЕРНОГОР***ВИКОРИСТАННЯ ТЕНЗОРІВ ПРИ АНАЛІЗІ ОСОБЛИВОСТЕЙ ФІЗИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТВЕРДИХ ТІЛ**

У статті наводяться основні відомості про тензори, розглядаються властивості тензорів другого рангу, приклади тензорних фізичних величин, а також приклад розв'язання задачі по тензорній тематичі. В останні десятиліття методи векторного і тензорного аналізу активно використовуються при викладанні курсу фізики твердого тіла, при аналізі особливостей фізичних властивостей твердих тіл, а також при описі анізотропії їх фізичних властивостей. Відомо, що фізичні властивості твердих тіл описуються скалярними, векторними або тензорними величинами. У кристалі, наприклад, вектори впливу і явища в загальному випадку не збігаються за напрямком, а зв'язок між цими векторами тісно пов'язана з симетрією кристала і анізотропією фізичного властивості. Зв'язок між явищем (ефектом), впливом і фізичним властивістю визначається символічною формулою: явище = фізична властивість × вплив. При кількісному описі фізичного властивості важливу роль відіграє вибір орієнтації осей системи координат. Перехід від однієї системи координат до іншої призводить до змін кількісних характеристик кристала, і ці зміни описуються за допомогою тензорів.

Ключові слова: фізика твердого тіла, тензор, векторний аналіз, тензорний аналіз, симетрія кристала, система координат, анізотропне середовище, електропровідність, електричне поле, система рівнянь.

*О. П. ПРИЩЕНКО, Т. Т. ЧЕРНОГОР***ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕНЗОРОВ ПРИ АНАЛИЗЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

В статье приводятся основные сведения о тензорах, рассматриваются свойства тензоров второго ранга, примеры тензорных физических величин, а также пример решения задачи по тензорной тематике. В последние десятилетия методы векторного и тензорного анализа активно используются при изложении курса физики твердого тела, при анализе особенностей физических свойств твердых тел, а также при описании анизотропии их физических свойств. Известно, что физические свойства твердых тел описываются скалярными, векторными или тензорными величинами. В кристалле, например, векторы воздействия и явления в общем случае не совпадают по направлению, а связь между этими векторами тесно связана с симметрией кристалла и анизотропией физического свойства. Связь между явлением (эффектом), воздействием и физическим свойством определяется символической формулой: явление = физическое свойство × воздействие. При количественном описании физического свойства важную роль играет выбор ориентации осей системы координат. Переход от одной системы координат к другой приводит к изменениям количественных характеристик кристалла, и эти изменения описываются с помощью тензоров.

Ключевые слова: физика твердого тела, тензор, векторный анализ, тензорный анализ, симметрия кристалла, система координат, анизотропная среда, электропроводность, электрическое поле, система уравнений.

*О. П. PRISHCHENKO, T. T. CHERNOGOR***THE USE TENSORS IN THE ANALYSIS FEATURES OF THE PHYSICAL PROPERTIES SOLIDS**

The article provides basic information about tensors, considers the properties of tensors of the second rank, examples of tensor physical quantities, and also an example of solving a problem on tensor topics. In recent decades, the methods of vector and tensor analysis have been actively used in the presentation of a course in solid state physics, in the analysis of the features of the physical properties of solids, and also in the description of the anisotropy of their physical properties. It is known that the physical properties of solids are described by scalar, vector, or tensor quantities. In a crystal, for example, the vectors of action and phenomena in the general case do not coincide in direction, and the connection between these vectors is closely related to the symmetry of the crystal and the anisotropy of the physical property. The connection between a phenomenon (effect), impact and physical property is determined by the symbolic formula: phenomenon = physical property × impact. In the quantitative description of a physical property, the choice of the orientation of the axes of the coordinate system plays an important role. The transition from one coordinate system to another leads to changes in the quantitative characteristics of the crystal, and these changes are described using tensors.

Keywords: solid state physics, tensor, vector analysis, tensor analysis, crystal symmetry, coordinate system, anisotropic medium, electrical conductivity, electric field, system of equations.

Вступ. В останні десятиліття роль фізики у розвитку сучасної техніки незмірно зросла. Особливе значення придбала така область цієї науки, як фізика твердого тіла, що займається дослідженням матеріалів, які завдяки своїм унікальним властивостям – напівпровідниковим, лазерним, оптичним, п'єзоелектричним, піроелектричним і т. д. – широко використовуються в напівпровідниковій техніці, квантовій електроніці та т. п.

Сучасне приладобудування немислимо без самого широкого використання природних і синтетичних матеріалів, зокрема кристалів. Бурхливо розширюються області використання і застосування фізичних властивостей кристалів сприяють перетворенню сучасної фізики кристалів –

кристалофізики – в самостійну швидко розвивається наукову дисципліну.

Наприклад, кристали корунду і алмазу завдяки виключно високій твердості використовуються в буровій техніці як абразиви; висока теплопровідність алмазу дозволяє використовувати його при виготовленні тепловідводів; графіт завдяки малій твердості застосовують як мастильний матеріал, а також для виготовлення олівців; чудові п'єзоелектричні властивості кварцу і турмаліну знаходять широке застосування в електротехніці і радіотехніці; гранати використовуються в якості елементів швидкодіючих ЕОМ; кристали кальциту і флюориту через особливих оптичних властивостей.

© Prishchenko O.P., T.T. Chernogor T.T., 2020

застосовуються при конструюванні оптичних приладів; слюда мусковіт в минулому заміняла шибки, а в даний час використовується як прекрасний ізоляційний матеріал. Таких прикладів можна навести безліч.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.

Основним завданням фізики твердого тіла є вивчення структури і фізичних властивостей твердих тіл, встановлення залежності цих властивостей від атомної структури речовини, розробка методів отримання та дослідження нових кристалічних матеріалів, що володіють заданими характеристиками. І дуже часто саме кристалографія виявляється тією азбукою, без якої неможливо приступити до вивчення твердого тіла і його властивостей. Особливо важливі знання (хоча б в найзагальніших рисах) найголовніших фізичних властивостей кристалів для геологів, бо багато фізичних властивостей лежить в основі діагностики – розпізнавання мінералів.

Фізичні властивості кристалів визначаються в першу чергу природою хімічних елементів, що входять до їх складу (велику роль відіграє тип хімічного зв'язку).

Крім того, прояв тих чи інших фізичних властивостей пов'язано з геометричним характером структури, тобто, взаємним розташуванням атомів в кристалічній структурі мінералів, а також з недосконаlostями структур реальних кристалів, що відображають умови їх утворення.

Залежно від коливань хімічного складу фізичні властивості одній і той ж речовини можуть варіювати в більш-менш широких межах.

Найхарактернішою рисою фізичних властивостей кристалів є їх *анізотропія* (здатність кристалів проявляти різні властивості в різних напрямках) і *симетрія*.

Симетрія всіх фізичних об'єктів, явищ і властивостей може бути проілюстрована геометричними образами, кожен з яких має свою власну симетрією [1–13]. Для їх опису використовуються скалярні, векторні і тензорні величини. Звідси і властивості відповідно поділяються на *скалярні*, *векторні* і *тензорні*.

Скалярними називаються фізичні властивості, величина яких не залежить від напрямку в якому вони визначаються. Далеко не всі фізичні властивості кристалів є скалярними (маса, щільність, питома теплоємність, внутрішня енергія та ін.). При фазовому переході речовини з аморфного стану в кристалічний, величина кожної з цих властивостей змінюється стрибком. За числовим значенням цих величин можна характеризувати речовини, відрізнити їх один від одного, судити про порушення структури. Аналітично скалярні величини задаються одним числом. Скалярна властивість ізотропна, отже, однакова, у всіх точках кристала, незалежно від напрямку і вибору системи координат, а значить, має

максимальну симетрією, геометричним образом, який ілюструє симетрію цієї властивості, буде сфера.

Векторними є найпростіші спрямовані величини, такі як сила і напруженість електричного поля і ін. Векторні властивості виникають в кристалах як анізотропному середовищі при скалярному – ізотропному – впливі на нього, тобто впливі, що не залежить від напрямку.

Наприклад, вектор \vec{a} певної довжини і напрямку, що описує деяку фізичну величину і залишається незмінним у будь-якій системі координат, може бути заданий його проєкціями – компонентами цього вектору a_1, a_2, a_3 – на координатні осі X, Y, Z . Інакше говорять про розкладанні вектору a по базису XYZ . Величина $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Симетрія векторної властивості відповідає симетрії нерухомого конуса.

Тензорні властивості – це такі за складністю (після векторних) спрямовані фізичні величини, що описуються в деякій системі координат. Якщо одна векторна величина \vec{b} є функцією іншої \vec{a} , то в найпростішому випадку вони зв'язані лінійною залежністю: $\vec{b} = s \cdot \vec{a}$.

Тобто в загальному випадку в анізотропних середовищах, наприклад в кристалах, зв'язок між цими векторами (\vec{a} і \vec{b}) залежить від їх напрямку.

При цьому кожна компонента вектору $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ є лінійною функцією кожної компоненти вектору $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ і може бути виражена системою лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} b_1 = A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3, \\ b_2 = A_{21}a_1 + A_{22}a_2 + A_{23}a_3, \\ b_3 = A_{31}a_1 + A_{32}a_2 + A_{33}a_3. \end{cases}$$

Дев'ять коефіцієнтів A_{ik} , де $i, k = 1, 2, 3$, виписані для зручності у вигляді квадратної таблиці і укладені в круглі дужки, позначають тензор другого рангу:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

А самі коефіцієнти – компоненти цього тензора – являють собою певні фізичні величини в заданій системі координат. Число підрядкових індексів у компонентах тензора відповідає його рангу.

Прикладами фізичних властивостей, описуваних тензором другого рангу (з $9 = 3^2$ компонентами), є питома електропровідність, теплопровідність, діелектрична проникність, магнітна сприйнятливості, термоелектрика та ін. Існують фізичні властивості, які описуються тензорами вищих рангів.

Наприклад, п'єзоелектричний ефект описується тензором третього рангу (з $27 = 3^3$ компонентами),

властивість пружності – тензором четвертого рангу (з $81 = 3^4$ компонентами). Як бачимо, в загальному випадку число компонент тензора, що має ранг n , дорівнює 3^n .

По суті, вектор \vec{a} , який визначається трьома значеннями його компонент вздовж координатних осей (a_1, a_2, a_3) , являє собою не що інше, як тензор першого рангу, для якого $n=1$, а $3^1 = 3$. Скаляр ж, який визначається одним числом, не залежних від вибору координатних осей, – тензор нульового рангу – $3^0 = 1$.

Таким чином, розподіл фізичних властивостей на скалярні, векторні і тензорні умовно.

Відзначимо, що компоненти тензора можуть мати різні значення в різних системах координат. Однак у зв'язку з тим, що кожен раз ці компоненти в сукупності визначають одну і ту ж фізичну величину, закон перетворення компонент при зміні системи координат повинен бути тісно пов'язаний з природою даної фізичної величини.

Довільність вибору системи координат є експериментально встановленим фактом і відображає однорідність простору. Закони перетворення компонент тензорів рангу від нульового по четвертий включно при перетворенні осей прямокутної декартової системи координат $X_1 X_2 X_3 \rightarrow X'_1 X'_2 X'_3$ представлені в таблиці 1.

Таблиця 1. – Перетворення компонент тензора n -го рангу ($n = 0; 1; 2; 3; 4$)

Тензор і його ранг n	Кількість компонентів тензора	Закон перетворення компонент тензора n -го рангу
Скаляр, $n = 0$	$3^0 = 1$	$\alpha' = \alpha$
Вектор, $n = 1$	$3^1 = 3$	$a'_j = \sum_{k=1}^3 l_{ik} a_k$ (T1)
Тензор другого рангу, $n = 2$	$3^2 = 9$	$b'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 l_{ik} l_{jm} b_{km}$ (T2)
Тензор третього рангу, $n = 3$	$3^3 = 27$	$c'_{ijk} = \sum_{m=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 l_{im} l_{jp} l_{kq} c_{mpq}$ (T3)
Тензор четвертого рангу, $n = 4$	$3^4 = 81$	$d'_{ijklm} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 l_{ip} l_{jq} l_{kr} l_{ms} d_{pqrs}$ (T4)
Примітки: 1. $l_{is} = \cos(\widehat{OX'_i}; \widehat{OX_s})$ – напрямні косинуси. Перший нижній індекс i відноситься до осі штрихованої (нової) системи координат. 2. Відповідно до правила Ейнштейна підсумовування від 1 до 3 проводиться по повторюваним індексам k ($n = 1; 2$), m ($n = 2; 3$), p, q ($n = 3; 4$), r і s ($n = 4$).		

Узагальнюючи вищевикладене, можна дати наступне визначення тензора n -го рангу. Тензор n -го рангу – це величина, яка визначається в декартовій системі координат сукупністю чисел або функцій $A_{ik\dots r}$ (число нижніх індексів дорівнює n), які при зміні системи координат $X_1 X_2 X_3 \rightarrow X'_1 X'_2 X'_3$ перетворюються за законом:

$$A'_{ik\dots r} = \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 \dots \sum_{w=1}^3 l_{is} l_{kt} \dots l_{rw} A_{st\dots w},$$

де $l_{is} = \cos(\widehat{OX'_i}; \widehat{OX_s})$ – косинус кута між i -й віссю системи координат $X'_1 X'_2 X'_3$ і s -й віссю системи координат $X_1 X_2 X_3$.

Симетрія властивостей, описуваних тензором другого і більш високих рангів, геометрично інтерпретується як більш складні геометричні фігури: еліпсоїд, параболоїд і т. д.

Властивості тензорів другого рангу. Тензори другого рангу – це величина, яка визначається в будь-якій системі координат дев'ятьма числами або

функціями, які при зміні системи координат перетворюються за формулою (T2). Тензор другого рангу A зручно представляти у вигляді матриці розміром 3×3 , тобто

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Властивості тензора A еквівалентні властивостям квадратної матриці A_{ik} , побудованої з компонент цього тензора, і ці властивості можна сформулювати наступним чином.

а) Тензор A є симетричним, якщо для будь-яких індексів i і k справедливо рівність $A_{ik} = A_{ki}$.

б) Тензор B є антисиметричним, якщо для будь-яких індексів i і k справедливо рівність $B_{ik} = -B_{ki}$.

в) Довільний тензор другого рангу C можна представити у вигляді суми симетричного A і антисиметричного B тензорів: $C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$, де

$$A_{ik} = \frac{C_{ik} + C_{ki}}{2}, \quad B_{ik} = \frac{C_{ik} - C_{ki}}{2}.$$

г) Якщо для тензора A існують вектори x , що задовольняють умові $Ax = \lambda x$, то напрямки, які визначаються цими векторами, називаються головними (власними) напрямками тензора A . Осі цих напрямків називаються головними осями тензора. Значення компонент тензора в системі координат головних осей називаються головними значеннями тензора. Отже, система рівнянь, з якої знаходяться головні напрямки і головні значення тензора A , в матричній формі має вигляд

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ця система лінійних однорідних рівнянь відносно координат x_i має нульове рішення, якщо $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, де I – одинична матриця розміру 3×3 . Таким чином, головні значення λ визначаються з характеристичного рівняння тензора A .

Таблиця 2. – Вплив симетрії кристала на фізичні властивості, описувані тензором другого рангу

Сингонія	Ненульові компоненти тензора	Характеристична поверхня
Кубічна	$b_{11} = b_{22} = b_{33}$	Сфера
Тетрагональна, гексагональна або тригональна	$b_{11} = b_{22}; b_{33} \neq b_{11}$	Еліпсоїд обертання (сфероїд) навколо головної осі симетрії
Ромбічна	$b_{11} \neq b_{22} \neq b_{33}$	Тривісний еліпсоїд з осями, паралельними кристалографічним осям
Моноклінна	$b_{11} \neq b_{22} \neq b_{33}; b_{13} = b_{31}$	Тривісний еліпсоїд, одна з осей якого паралельна головній кристалографічній осі
Триклінна	$b_{11} \neq b_{22} \neq b_{33};$ $b_{12} = b_{21}; b_{13} = b_{31};$ $b_{23} = b_{32}; b_{12} \neq b_{13} \neq b_{23}$	Тривісний еліпсоїд

Приклади характеристичних поверхонь властивостей, описуваних тензором другого рангу, в кристалах різної симетрії представлені в таблиці 2.

Для того щоб виміряти в кристалі ту чи іншу фізичну властивість, в загальному випадку необхідно зробити стільки незалежних вимірювань цих властивостей, скільки є незалежних компонент в тензорі, що описує цю властивість.

Наприклад, для характеристики скалярної властивості – тензорної властивості нульового рангу – досить одного виміру, для векторного – властивості першого рангу – трьох вимірів і т. д.

Для властивостей, описуваних тензорами вищих рангів, з великою кількістю компонент, число незалежних компонент скорочується, що пов'язане з симетрією досліджуваного кристала (що робить компоненти тензора вже не незалежними, а пов'язаними між собою певними співвідношеннями), тобто з симетрією самого тензора, а також з законами термодинаміки.

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

що є кубічним рівнянням щодо λ .

В системі головних осей тензор A записується в матричному вигляді як

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

причому три головних осі OX_i цього тензора взаємно перпендикулярні.

Можна класифікувати-ідентифікувати наступні випадки аналізу системи.

1) Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, тензор називається кульовим. Такий тензор пропорційний одиничному (тобто виконується умова $A = \lambda_i I$) і має однаковий вигляд у всіх системах координат.

2) Якщо два головних значення тензора однакові, а третє відмінно від них (наприклад, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$), то тензор називається симетричним.

3) Якщо всі три головних значення тензора різні, то тензор називається асиметричним.

Викладання основного матеріалу досліджень.

Розглянемо як приклад закон Ома. Якщо на середу діє електричне поле з напруженістю E , то з'являється струм, щільність якого j пропорційна питомій електропровідності середовища σ . Величини $E = (E_1, E_2, E_3)$ і $j = (j_1, j_2, j_3)$ характеризуються трьома компонентами, тобто є векторними. В ізотропному середовищі електропровідність σ не залежить від напрямку, і тому для будь-якого напрямку виконується співвідношення: $j = \sigma \cdot E$, при цьому вектор j (щільність струму) збігається за напрямком з вектором E (напруженістю електричного поля).

У анізотропному середовищі буде спостерігатися зовсім інша картина: електропровідність σ буде залежати від напрямку, і закон Ома не може бути описаний в простій формі.

Для простоти розглянемо двовимірний випадок (рис. 1), коли в обраній системі координат $(X_1; X_2)$

вектори E напруженості електричного поля і j щільності струму не збігаються. А це може бути лише в разі нерівності $\sigma_{11} \neq \sigma_{22}$, тобто електропровідність вздовж одного з координатних напрямків не збігається з електропровідністю вздовж іншого координатного напрямку.

Для осьових напрямків (e_1 , і e_2), кожне з яких в анізотропному середовищі характеризується певним значенням електропровідності (σ_{11} і σ_{22} відповідно), значення компонент щільності струму будуть наступними: $j_1 = \sigma_{11} \cdot E_1$, $j_2 = \sigma_{22} \cdot E_2$, $j_3 = 0$.

При нерівності значень електропровідності в цих напрямках (тобто $\sigma_{11} \neq \sigma_{22}$) вектор щільності струму j , який дорівнює сумі його компонент: $j = j_1 + j_2$ не співпадатиме у напрямку з вектором напруженості електричного поля $E = E_1 + E_2$ (рис. 1).

При переході до тривимірного випадку, тобто до трьох координатних векторів X_1, X_2, X_3 , кожна компонента вектору $j(j_1, j_2, j_3)$ буде залежати від усіх трьох компонент вектору $E(E_1, E_2, E_3)$. В результаті отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} j_1 = \sigma_{11} \cdot E_1 + \sigma_{12} \cdot E_2 + \sigma_{13} \cdot E_3, \\ j_2 = \sigma_{21} \cdot E_1 + \sigma_{22} \cdot E_2 + \sigma_{23} \cdot E_3, \\ j_3 = \sigma_{31} \cdot E_1 + \sigma_{32} \cdot E_2 + \sigma_{33} \cdot E_3, \end{cases}$$

що дозволяє знайти щільність струму $j(j_1, j_2, j_3)$ в кристалі, на який діє поле напруженості E .

Легко усвідомити сенс (і спосіб визначення) коефіцієнтів σ_{ik} . Дійсно, для поля, спрямованого уздовж координатної осі X_1 , $E(E_1, 0, 0)$ – дві компоненти дорівнюють 0.

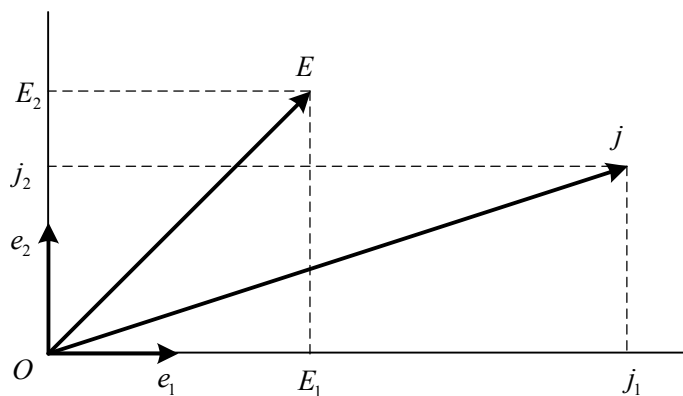


Рис. 1 – Ілюстрація закону Ома в анізотропному середовищі, для якого $\sigma_{11} = 3\sigma_{22}$ (\vec{e}_1 і \vec{e}_2 – орієнтування осей ортонормованої системи координат)

У компактному вигляді будь-яке з рівнянь системи може бути записано в наступному вигляді:

$$j_i = \sigma_{ik} \cdot E_k.$$

Підставивши значення E в систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} j_1 = \sigma_{11} \cdot E_1, \\ j_2 = \sigma_{21} \cdot E_1, \\ j_3 = \sigma_{31} \cdot E_1. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \sigma_{11} = \frac{j_1}{E_1}, \sigma_{21} = \frac{j_2}{E_1}, \sigma_{31} = \frac{j_3}{E_1}.$$

Якщо поле має вигляд $E(0, E_2, 0)$, то

$$\begin{cases} j_1 = \sigma_{12} \cdot E_2, \\ j_2 = \sigma_{22} \cdot E_2, \\ j_3 = \sigma_{32} \cdot E_2, \end{cases}$$

$$\text{Звідки } \sigma_{12} = \frac{j_1}{E_2}, \sigma_{22} = \frac{j_2}{E_2}, \sigma_{32} = \frac{j_3}{E_2}.$$

І нарешті, поле виду $E(0, 0, E_3)$ дозволить визначити коефіцієнти:

$$\sigma_{13} = \frac{j_1}{E_3}, \sigma_{23} = \frac{j_2}{E_3}, \sigma_{33} = \frac{j_3}{E_3}.$$

Слід звернути увагу на те, що навіть в тому випадку, коли поле визначається тільки одним компонентом E , вектор щільності струму, тим не менш, буде мати всі три компоненти, відмінні від нуля.

Таким чином, в загальному випадку дев'ять коефіцієнтів – дев'ять значень електропровідності σ_{ik} , де $i, k = 1, 2, 3$, укладені в квадратні дужки, позначають тензор другого рангу. Самі ж коефіцієнти – не що інше, як певні фізичні величини – в даному випадку значення електропровідності.

Задача. Знайти величину і напрямок вектору щільності струму j в системі координат $X_1X_2X_3$, що виникає в кристалічній пластинці площею S і товщиною d ($\sqrt{S} \gg d$) під дією зовнішнього поля $E = 150 \text{ В/см}$ в напрямку $(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2; 0)$, якщо питома провідність кристала (в $10^{-7} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$) в цій системі координат $X_1X_2X_3$ описується тензором

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 8 \\ -2 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Компоненти вектору напруженості зовнішнього електричного поля $E(E_1, E_2, E_3)$ дорівнюють $E_1 = 150 \cdot \sqrt{2}/2 \text{ В/см}$; $E_2 = 150 \cdot \sqrt{2}/2 \text{ В/см}$; $E_3 = 0$. Відповідно до закону Ома в диференціальній формі, компоненти вектору щільності струму $j(j_1, j_2, j_3)$ в

кристалі визначаються за формулою $j_i = \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} E_k$:

$$\begin{cases} j_1 = \sigma_{11} \cdot E_1 + \sigma_{12} \cdot E_2 + \sigma_{13} \cdot E_3, \\ j_2 = \sigma_{21} \cdot E_1 + \sigma_{22} \cdot E_2 + \sigma_{23} \cdot E_3, \\ j_3 = \sigma_{31} \cdot E_1 + \sigma_{32} \cdot E_2 + \sigma_{33} \cdot E_3. \end{cases}$$

Чисельні значення:

$$\begin{aligned} j_1 &= 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ А/см}^2; \\ j_2 &= 14,7 \cdot 10^{-5} \text{ А/см}^2; \\ j_3 &= 8,46 \cdot 10^{-5} \text{ А/см}^2; \\ |j| &= 18,5 \cdot 10^{-5} \text{ А/см}^2. \end{aligned}$$

Напрямок вектору j визначається кутами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ за допомогою формули $\cos \varphi_i = \frac{j_i}{|j|}$, де ($i = 1; 2; 3$). Ці кути дорівнюють $\varphi_1 = 66^\circ$, $\varphi_2 = 37^\circ$, $\varphi_3 = 63^\circ$.

Відповідь: $|j| = 18,5 \cdot 10^{-5} \text{ А/см}^2$, $\varphi_1 = 66^\circ$, $\varphi_2 = 37^\circ$, $\varphi_3 = 63^\circ$.

Висновки та перспективи подальшого розвитку даного напрямку.

Застосування розглянутого в даній статті тензорного аналізу вимагає знання відповідних розділів лінійної алгебри, векторної алгебри та теорії поля. На практичних заняттях з вищої математики часто доводиться розв'язувати завдання загального характеру. Але для студентів технічних спеціальностей більший інтерес представляють завдання, які безпосередньо пов'язані з їх професійною підготовкою.

Таким чином, розглядаючи завдання, подібні наведеним в даній статті, ми підвищимо зацікавленість і мотивацію майбутніх фахівців до навчання [14–22].

Список літератури

1. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления : уч. пособие для вузов. – Х.: Вища шк.; Изд-во при Харьк. гос. ун-те, 1986. 216 с.
2. Высшая математика в примерах и задачах : уч. пособ. : Т. 2 / Ю.Л. Геворкян, Л.А. Балака, С.С. Габриелян и др.; под ред. Ю.Л. Геворкяна. – Х.: Підручник НТУ «ХПШ», 2011. – 376 с.
3. Вища математика в прикладах і задачах : у 2 т. Т. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди: навч. пос. / Л.В. Курпа, Н.О. Кириллова, Г.Б. Лінник та ін.; за ред. Л.В. Курпи. – Х.: НТУ «ХПШ», 2009. – 432 с.
4. Геворкян Ю.Л. Краткий курс высшей математики : учеб. пособ. : в 2 ч. Ч. 2 / Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев, Н.А. Чикина. – Х.: Підручник НТУ «ХПШ», 2011. – 476 с.
5. Диференціальні рівняння та їх застосування : н.-мет. посіб. / Прищенко О.П., Черногор Т.Т. – Х.: НТУ «ХПШ», 2017. – 88 с.
6. Ерёмин В. В. Математика в химии. – 2-е изд., испр. / В.В. Ерёмин. – М.: МЦНМО, 2016. – 64 с.
7. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 2 / Н.О. Чікіна, А.М. Гайдаш, В.Д. Крупка та ін.; за ред. Н.О. Чікіної. – Х.: Підручник НТУ «ХПШ», 2013. – 216 с.
8. Методические указания к решению расчетных заданий по теме «Дифференциальные уравнения и их приложения» по курсу высшей математики для студентов химических специальностей / сост. А.М. Мануйлова, Е.И. Орлова, Т.Т. Черногор и др. – Харьков: ХПИ, 1989. – 76 с.
9. Прищенко О. П., Черногор Т. Т. Аналіз прикладів застосування диференціальних рівнянь в хімічній та харчовій технології // Вісник НТУ «ХПШ». – Харків : НТУ «ХПШ», 2018. – № 40 (1316). – с. 39 – 45.
10. Прищенко О.П., Черногор Т.Т., Бухкало С.І. Деякі особливості проведення кореляційного аналізу Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXVII міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD-2019, 15-17 травня 2019 р.: у 4 ч. Ч. II. / за ред. проф. Сокола Є.І. – Харків: НТУ «ХПШ». – с.320.
11. Прищенко О.П., Черногор Т.Т. Деякі особливості проведення регресійного аналізу Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXVII міжнародної науково-практичної конференції MicroCAD-2019, 15-17 травня 2019 р.: у 4 ч. Ч. II. / за ред. проф. Сокола Є.І. – Харків: НТУ «ХПШ». – с. 319.
12. Скатецкий В.Г. Математические методы в химии : учеб. пособ. для студентов вузов / В.Г. Скатецкий, Д.В. Свиридов, В.И. Яшкин. – Минск : ТетраСистемс, 2006. – 368 с.
13. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах : у 3 ч. Ч. 3 : Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин. – Харків : ХНУРЕ, 2002. – 596 с.
14. Бухкало С.І. Деякі моделі процесів хімічного спінювання вторинного поліетилену // Вісник НТУ «ХПШ». Х.: НТУ «ХПШ». 2017. № 18 (1240). – С. 35–45.
15. Бухкало С.І. Загальна технологія харчової промисловості: тестові завдання (підручник з грифом МОНУ), Київ: Центр учбової літератури, 2014. – 412 с.
16. Бухкало С.І. Моделі енергетичного міксу для утилізації полімерної частки ППВ // Вісник НТУ «ХПШ». – Х.: НТУ «ХПШ». 2016. – № 19 (1191). – с. 23–32.
17. Prishchenko O.P., Chernogor T.T. Using of methods of cross-correlation and regressive analysis for determination of functional dependence between sizes // Вісник НТУ «ХПШ» Серія: Інноваційні дослідження у наукових роботах студентів. – Харків : НТУ «ХПШ», 2019. – №15 (1340). – С. 36 – 41.

18. Prishchenko O.P., Chernogor T.T. Analysis of opportunities of analytical method of optimization in chemical technology // Вісник НТУ «ХПІ». – Х. : НТУ «ХПІ», 2020. – №5 (1359). – С. 71 – 77.
19. S. Bukhhalo, A. Ageicheva, O. Komarova. Distance learning main trends. Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XXVI міжн. н-пр. конф. MicroCAD-2018, 16-18 травня 2018р. Ч. II / за ред. проф. Сокола Є.І. Х. :НТУ «ХПІ». 205 с.
20. Бухкало С.І., Іглін С.П. Деякі моделі дослідження структурно-хімічних змін при експлуатації полімерних виробів. Інтегровані технології та енергозбереження. Х.: НТУ «ХПІ», 2016. № 3. – С. 52–57.
21. Бухкало С.І., Білоус О.В., Демидов І.М. Розробка комплексного антиоксиданту із екстрактів листя горіху волоського та календули. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. № 1/6(73), – с. 22–26. – Х. : Технол. центр.
22. Bukhhalo S.I., Klemeš J.J., Tovazhnyansky L.L., Arsenyeva O.P., Kapustenko P.O., Perevertaylenko O.Y. Eco-friendly synergetic processes of municipal solid waste polymer utilization. *Chemical Engineering Transactions*, Vol.70, (2018), – pp.2047–2052.
- kharchovii tekhnologii // Visnik NTU «KhPI». – Kharkiv : NTU «KhPI», 2018. – No. 40 (1316), – pp. 39 – 45.
10. Prishchenko O.P., Chernogor T.T., Bukhhalo S.I. Dejaki osoblivosti provedennja koreljacijnogo analizu Informacijni tehnologii: nauka, tehnika, tehnologija, osvita, zdorov'ja: tezi dopovidej XXVII mizhnarodnoї naukovo-praktichnoї konferencii MicroCAD-2019, 15-17 travnja 2019 : Ch. II. / za red. prof. Sokola Є.І. – Kh: NTU «KhPI». – p.320.
11. Prishchenko O.P., Chernogor T.T. Dejaki osoblivosti provedennja regresijnogo analizu Informacijni tehnologii: nauka, tehnika, tehnologija, osvita, zdorov'ja: tezi dopovidej XXVII mizhnarodnoї naukovo-praktichnoї konferencii MicroCAD-2019, 15-17 travnja 2019 : u 4 ch. Ch. II. / za red. prof. Sokola Є.І. – Kharkiv: NTU «KhPI». – p. 319.
12. Skateckij V.G. Matematicheskie metody v himii : ucheb. posob. dlja studentov vuzov / V.G. Skateckij, D.V. Sviridov, V.I. Jashkin. – Minsk : TetraSistems, 2006. – 368 p.
13. Tevjashev A.D. Vishha matematika u prikladah ta zadachah : u 3 ch. Ch. 3 : Diferencial'ni rivnjannja. Rjadi. Funkcii kompleksnoї zminnoї. Operacijne chislennja : navch. posib. / A.D. Tevjashev, O.G. Litvin. Kh : HNURE, 2002. – 596 p.
14. Bukhhalo S.I. Dejaki modeli procesiv himichnogo spinjuvannja vtorinnogo polietilenu // Visnik NTU «KhPI». Kh.: NTU «KhPI». 2017. No. 18 (1240), pp. 35–45.
15. Bukhhalo S.I. Zagal'na tehnologija harchovoї promislivosti: testovi zavdannja (pidruchnik z grifom MONU), Kiiiv: Centr uchbovoї literaturi, 2014. – 412 p.
16. Bukhhalo S.I. Modeli energetichnogo miksu dlja utilizacii polimernoї chastki TPV // Visnik NTU «KhPI». – H.: NTU «KhPI». 2016. – No. 19 (1191), – pp. 23–32.
17. Prishchenko O.P., Chernogor T.T. Using of methods of cross-correlation and regressive analysis for determination of functional dependence between sizes // Visnik NTU «KhPI». Kh : NTU «KhPI», 2019. No. 15, pp. 36 – 41.
18. Prishchenko O.P., Chernogor T.T. Analysis of opportunities of analytical method of optimization in chemical technology // Visnik NTU «KhPI», 2020. No. 5, pp. 71–77.
19. S. Bukhhalo, A. Ageicheva, O. Komarova. Distance learning main trends. Informacijni tehnologii: nauka, tehnika, tehnologija, osvita, zdorov'ja: tezi dopovidej XXVI mizhn. n-pr. konf. MicroCAD-2018, 16-18 travnja 2018r. Ch. II / za red. prof. Sokola Є.І. Kh :NTU «KhPI». – 205 p.
20. Bukhhalo S.I., Iglin S.P. Dejaki modeli doslidzhennja strukturno-himichnih zmin pri ekspluatcii polimernih virobiv. Integrovani tehnologii ta energozberezhennja. H.: NTU «KhPI», 2016. No. 3, – pp. 52–57.
21. Bukhhalo S.I., Bilous O.V., Demidov I.M. Rozrobka kompleksnogo antioksidantu iz ekstraktiv listja gorihu volos'kogo ta kalendulr. Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij. No.1/6(73), (2015), – pp. 22–26. Kharkiv : «Tehnolog. centr».
22. Bukhhalo S.I., Klemeš J.J., Tovazhnyansky L.L., Arsenyeva O.P., Kapustenko P.O., Perevertaylenko O.Y. “Eco-friendly synergetic processes of municipal solid waste polymer utilization”. *Chemical Engineering Transactions*, Vol.70, (2018), – pp.2047–2052.

Надійшла (received) 19.10.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

- Прищенко Ольга Петрівна (Прищенко Ольга Петровна, Prishchenko Olga Petrivna)** – старший викладач кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна;
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0530-2131> e-mail: priolga2305@gmail.com
- Черногор Тетяна Тимофіївна (Черногор Татьяна Тимофеевна, Chernogor Tetyana Timofiyivna)** – старший викладач кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна;
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7823-7628> e-mail: tatyanchernogor54@gmail.com