УДК 519.6 doi: 10.20998/2220-4784.2022.01.06

O. P. PRISHCHENKO, N. V. CHEREMSKAYA, S. I. BUKHKALO

EXAMPLES OF INFORMATION TECHNOLOGIES FOR RECONSTRUCTION FROM THE DATA OF THE SPECTRUM OF SOME CLASSES OF RANDOM FUNCTIONS

It is known that a stationary random process is represented as a superposition of harmonic oscillations with real frequencies and uncorrelated amplitudes. In the study of nonstationary processes, it is natural to have increasing or declining oscillationcs. This raises the problem of constructing algorithms that would allow constructing broad classes of nonstationary processes from elementary nonstationary random processes. A natural generalization of the concept of the spectrum of a nonstationary random process is the transition from the real spectrum in the case of stationary to a complex or infinite multiple spectrum in the nonstationary case. There is also the problem of describing within the correlation theory of random processes in which the spectrum has no analogues in the case of stationary random processes, namely, the spectrum point is real, but it has infinite multiplicity for the operator image of the corresponding operator, and when the spectrum itself is complex. Reconstruction of the complex spectrum of a nonstationary random function is a very important problem in both theoretical and applied aspects. In the paper the procedure of reconstruction of random process, sequence, field from a spectrum for Gaussian random functions is developed. Compared to the stationary case, there are wider possibilities, for example, the construction of a nonstationary random process with a real spectrum, which has infinite multiplicity and which can be distributed over the entire finite segment of the real axis. The presence of such a spectrum leads, in contrast to the case of a stationary random process, to the appearance of new components in the spectral decomposition of random functions that correspond to the internal states of "strings", i.e. generated by solutions of systems of equations in partial derivatives of hyperbolic type. The paper deals with various cases of the spectrum of a non-self-adjoint operator *A*, namely, the case of a discrete spectrum and the case of a continuous spectrum, which is located on a finite segment of the real axis, which is the range of values of the real non-decreasing function *a (x)*. The cases *a (x) = 0*, *a (x) = const*, *a (x) = x* and *a (x)* is a piecewise constant function are studied. The authors consider the recovery of nonstationary sequences for different cases of the spectrum of a non-self-adjoint operator *A* promising since spectral decompositions are a superposition of discrete or continuous internal states of oscillators with complex frequencies and uncorrelated amplitudes and therefore have deep physical meaning.

Key words: information technologies, mathematical modeling, correlation function, triangular models of operators, nonstationary random sequences and processes, spectrum of an operator, rank of nonstationarity, quasi-rank.

Introduction.

The problem of reconstruction based on the complex spectrum of a non-stationary random function is quite relevant in both theoretical and applied aspects. This is due to the fact that a natural generalization of the concept of the spectrum of a non-stationary random process would be the transition from a real spectrum in the case of stationarity to a complex-valued or infinite spectrum in the non-stationary case. The basis for such a generalization is the fact that a stationary random process is represented in the form of a superposition of harmonic oscillations with a real frequency and uncorrelated amplitudes, that is, an elementary stationary random process is harmonic oscillations of the form $\xi(t,\omega)=\xi_0(\omega)e^{i\lambda_0 t}$, where λ_0 – real frequency of harmonic oscillations. When studying non-stationary (transient) processes, the presence of growing or decaying oscillations is natural, therefore the simplest non-stationary random processes are processes of the form $\xi(t,\omega)=\xi_0(\omega)e^{i\lambda_0 t}$, where $\lambda_0=\alpha_0+i\beta_0$, $\beta_0 \neq 0$ (if $\beta_0>0$, then the fluctuations increase, and if $\beta_0<0$, then the oscillations disappear). At the same time, the question arises about the construction of algorithms that would allow to "compose" sufficiently broad classes of non-stationary processes from elementary non-stationary random processes. A similar question arises with non-stationary sequences and non-homogeneous fields. Separately, there is a problem of description within the correlation theory of random processes, in which the spectrum has no analogues in the case of stationary random processes, for example, the point of the spectrum is valid, but the corresponding operator in the operator image has this point of infinite multiplicity, and also, when the spectrum itself is complex.

For Gaussian random functions, the procedure for reconstruction of a random process, sequence, field by spectrum is developed in the article. It should be noted that compared to the stationary case, wider possibilities open up here, for example, the construction of a non-stationary random process with a valid spectrum, which has an infinite multiplicity and which can be distributed over the entire finite segment of the valid axis. The presence of such a spectrum leads, in contrast to the case of a stationary random process, to the appearance of new components in the spectral distribution of random functions, which correspond to the internal states of the "strings", that is, they are generated by the solutions of systems of equations in partial derivatives of the hyperbolic type. The task of obtaining physical interpretations of spectral expansions of non-stationary functions is closely related to the task of restoring a random process by spectrum. The article continues the research [7] and solves the problem of obtaining spectral distributions of some new classes of random sequences and fields. Note that, using the operation of coupling operators (operator complexes), it is possible to consider more complex cases of spectra.

Analysis of the latest research.

Spectral analysis of unitary operators was successfully used by A.M. Kolmogorov [1] to build a correlation theory of stationary random sequences, as well as to solve a number of applied problems of filtering and forecasting of stationary random sequences.

Kolmogorov's approach is based on the fact that each stationary random sequence corresponds to a sequence of vectors in a specially constructed Hilbert space, which allows studying non-stationary random sequences by methods of mathematical analysis of deterministic functions that take values in the corresponding Hilbert space. Later, Kolmogorov's ideas were further developed in works [2, 3]. A. M. Yaglom [4] and Yu. A. Rozanov [5] made a particularly significant contribution to the construction of the general theory of stationary sequences in Hilbert space.

The spectral theory of non-unitary operators, the beginning of which was laid in the work of M.S. Livshits [6], and further development was obtained in [8-19, 21, 22], could not help but give impetus to various applications. One of such examples of effective applications is the reconstruction of random processes and sequences by spectrum. For stationary random processes, this problem is solved in [1, 4]. For non-stationary random processes and sequences, this problem was not posed in this formulation. These considerations were the motivating motives for the appearance of this article. In the process of researching this topic, a number of problems arose that are of independent interest.

Formulation of the problem.

The task of reconstructing random processes (sequences) by spectrum is one of the important tasks of modeling random functions. In the case of a stationary random process, this problem is solved using the spectral theory of self-adjoint operators and, for example, in the case of a discrete spectrum, it is reduced to the construction of a special nondecreasing function of jumps with jumps at the points of the spectrum. For non-stationary random functions, this problem was not posed in this formulation. To solve this problem, it is natural tco use the spectral theory of dissipative non-self-adjoint operators or contractions.

Let us first consider the case of a discrete spectrum. Let be a given finite or countable set of complex numbers $\{\lambda_k\}$, which are located in the upper half-plane and are limited as a whole: $|\lambda_k| < C$. Let's construct a dissipative operator $\hat{A}$ whose spectrum consists of these points. Let $\lambda_k = \alpha_k + i\frac{\beta_k^2}{2}$ and put an additional requirement that $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$. To construct a dissipative operator, consider a Hilbert space l_2 and an operator $\hat{A} \in [l_2, l_2]$ of the following form:

$$\left(\hat{A}f\right)_k = \lambda_k f_k + i\sum_{j=1}^{k-1} f_j \beta_j \beta_k \quad (k = 1,2,...) \qquad (1)$$

It can be seen from (1) that this operator is constructed only by the spectrum $\{\lambda_k\}$ and its matrix image is lower triangular. It's easy to check that $\frac{\hat{A} - \hat{A}^*}{i} = \left\langle \cdot, \hat{g} \right\rangle \hat{g}$, where $\hat{g} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, that is, it $\hat{A}$ has a one-dimensional imaginary component. But then the curve $\hat{\xi}_t$ in l_2 shape $\hat{\xi}_t = e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0$, where $\hat{\xi}_0$ fixed element with l_2, is a non-stationary curve with a rank of non-stationarity equal to one, and the spectrum of this curve consists of $\{\lambda_k\}$. Similarly, the sequence $\hat{\xi}_n$ in l_2 shape $\hat{\xi}_n = \hat{A}^n \hat{\xi}_0$ is a non-stationary sequence with quasi-rank equal to unity and a spectrum $\{\lambda_k\}$. Using the image for the function from the operator $\hat{A}$ through its resolvent, we have for the k-th component $e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0$ (in the case when $\hat{\xi}_0 = \hat{g}$) representation: $\left(e^{it\hat{A}}\hat{g}\right)_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{it\lambda}\frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda - \overline{\lambda_j}}{\lambda - \lambda_j}d\lambda$. If all λ_j are distinct, then, calculating using the theory of residues, this integral is equal to the sum of residues at special points. We receive $\left(e^{it\hat{A}}\hat{g}\right)_k = \sum_{j=1}^{k} e^{it\lambda_j} a_{jk}$. For $\hat{A}^n\hat{g}$, we get, respectively $\left(\hat{A}^n\hat{g}\right)_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \lambda^n \frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda - \overline{\lambda_j}}{\lambda - \lambda_j}d\lambda$. But in the case of excellent ones, we get accordingly λ_j accordingly we have $\left(\hat{A}^n\hat{g}\right)_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j{}^n b_{jk}$, where $e^{it\lambda_j}a_{jk}$, $\lambda_j{}^n b_{jk}$ excesses of the corresponding integrand functions at special points. In the event that $\xi_0 \neq \hat{g}$ calculations are more cumbersome, so only the final result will be given:

$$\left(e^{it\hat{A}}\xi_0\right)_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{it\lambda}\frac{\beta_k}{\overline{\lambda}_k - \lambda}\cdot G d\lambda,$$

$$G = \sum_{\mu=0}^{k-1}\left(1 + \frac{i\beta_\mu^2}{\overline{\lambda}_\mu - \lambda}\right)\left[\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{a_{\nu+1} - a_\nu}{\prod_{\mu=0}^{\nu}\left(1 + \frac{i\beta_\mu^2}{\overline{\lambda}_\mu - \lambda}\right)}\right] + \prod_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda_j - \lambda}{\overline{\lambda}_j - \lambda},$$

where $a_k = \frac{\hat{\xi}_k}{\beta_k}$. For $\hat{A}^n\hat{\xi}_0$ accordingly we have:

$$\left(\hat{A}^n\xi_0\right)_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{it\lambda}\frac{\beta_k}{\overline{\lambda}_k - \lambda}\cdot G d\lambda,$$

$$G = \sum_{\mu=0}^{k-1}\left(1 + \frac{i\beta_\mu^2}{\overline{\lambda}_\mu - \lambda}\right)\left[\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{a_{\nu+1} - a_\nu}{\prod_{\mu=0}^{\nu}\left(1 + \frac{i\beta_\mu^2}{\overline{\lambda}_\mu - \lambda}\right)}\right] + \prod_{j=1}^{k-1}\frac{\lambda_j - \lambda}{\overline{\lambda}_j - \lambda},$$

where $a_k = \frac{\hat{\xi}_k}{\beta_k}$.

ISSN 2220-4784 (print), ISSN 2663-8738 (online)

Consider the case when the spectrum of the non-self-adjoint operator A is located on a finite segment of the real axis, which is the domain of values of a real-valued nondecreasing function $a(x)$. Then a model operator is an operator $\hat{A}$ that acts in $L^2_{[0,l]}$ and acquires the form $\left(\hat{A}f\right)(x)=a(x)f(x)+i\int_0^x f(y)dy$. Using the results of work [20] on the image of the resolvent, for the curve $\hat{\xi}_t=e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0$ we have:

$$e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0=e^{ita(x)}\hat{\xi}_0(x)+\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma e^{it\lambda}\left(\int_0^x\hat{\xi}_0(\tau)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau}e^{-\int_\tau^x\frac{dy}{a(y)-\lambda}}d\tau\right)d\lambda$$

.

Note that the curve $e^{ita(x)}\hat{\xi}_0(x)$ is a stationary curve in Hilbert space $L^2_{[0,l]}$.

Similarly for $\hat{\xi}_n=\hat{A}^n\hat{\xi}_0$ we get:

$$\hat{\xi}_n=\hat{A}^n\hat{\xi}_0=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\lambda^n\left(\frac{\hat{\xi}_0(x)}{a(x)-\lambda}-i\int_0^x\hat{\xi}_0(\tau)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau}e^{-\int_\tau^x\frac{dy}{a(y)-\lambda}}d\tau\right)d\lambda,$$

or

$$\hat{\xi}_n=a^n(x)\hat{\xi}_0(x)-i\int_0^x\hat{\xi}_0(\tau)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau}\left(-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\lambda^n e^{-\int_\tau^x\frac{dy}{a(y)-\lambda}}d\lambda\right)d\tau,$$

where the first term is a Hankel sequence in $L^2_{[0,l]}$, due to the fact that its correlation function is equal to

$$\left\langle a^n(x)\hat{\xi}_0(x),a^m(x)\hat{\xi}_0(x)\right\rangle_{L^2_{[0,l]}}=\int_0^l a^{n+m}(x)\left|\hat{\xi}_0(x)\right|^2dx,$$

that is, it depends on the amount $n+m$.

Let's consider the cases:

1. $a(x)=0$,

$$u_n(x)=e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0=\hat{\xi}_0(x)-\int_0^x\hat{\xi}_0(\tau)\sqrt{\frac{t}{x-\tau}}J_1\left(2\sqrt{t(x-\tau)}\right)d\tau,$$

where $J_1(y)=\frac{y}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k}}{2^{2k}k!(k+1)!}$ Bessel function of the I-st kind of the 1-st order, $y=2\sqrt{t(x-\tau)}$.

2. $a(x)=a_0$,

$$u_n(x)=e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0=e^{ita_0}\hat{\xi}_0(x)-\int_0^x e^{ia_0t}\hat{\xi}_0(\tau)\sqrt{\frac{t}{x-\tau}}J_1\left(2\sqrt{t(x-\tau)}\right)d\tau\cdot$$

3. $a(x)=x$,

$$u_n(x)=e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0=e^{itx}\hat{\xi}_0(x)-\int_0^x e^{itx}\hat{\xi}_0(\tau)\sqrt{\frac{t}{x-\tau}}J_1\left(2\sqrt{t(x-\tau)}\right)d\tau\cdot$$

4. Let *a(x)* be a piecewise constant function of the form $a(x)=\begin{cases}b_1,0\le x\le a_1\\ b_2,a_1\le x\le a_2\\ b_3,a_2\le x\le 1.\end{cases}$

There are six possible cases of mutual location of points $\tau<x$ from the interval $[0;1]$ relative to points a_1 and a_2. Let us consider only the most complex arrangement, in which the interval $(\tau;x)$ contains gaps a_1 and a_2.

Let $0<\tau<a_1<a_2<x<1$, then

$$\hat{\xi}_n=a^n(x)\hat{\xi}_0(x)+\frac{1}{2\pi}\int_0^y\hat{\xi}_0(\tau)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\tau}\Theta d\tau,$$

$$\Theta=\left\{\theta(n,x,b_1,b_2,b_3)+\theta(n,x,b_3,b_1,b_2)+\theta(n,x,b_2,b_3,b_1)\right\},$$

$$\theta(n,x,b_1,b_2,b_3)=2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[i(a_1-\tau)\right]^n}{n!(n-1)!}\left\{e^{ix\lambda+i\frac{a_2-a_1}{\lambda-b_2}+i\frac{y-a_2}{\lambda-b_3}}\right\}^{(n-1)}\Bigg|_{\lambda=b_1}=$$

$$=2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[i(a_1-\tau)\right]^n}{n!(n-1)!}\left\{e^{ixb_1}(ix)^{n-1}e^{i\frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}}\cdot e^{i\frac{y-a_2}{b_1-b_3}}+\sum_{j=1}^{n-1}C_{n-1}^j e^{ixb_1}(ix)^{n-1-j}\left\{e^{i\frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}}\times\right.\right.$$

$$\times e^{i\frac{y-a_2}{b_1-b_3}}\cdot\frac{(-1)^j}{(b_1-b_3)^j}\cdot\sum_{S=1}^{j}\frac{\left[i(y-a_2)\right]^S}{S!(b_1-b_3)^S}\cdot\Phi(S;j)+\sum_{K=1}^{j}C_j^K e^{i\frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}}\cdot\frac{(-1)^K}{(b_1-b_2)^K}\times$$

$$\left.\left.\times\sum_{S=1}^{K}\frac{\left[i(a_2-a_1)\right]^S}{S!(b_1-b_2)^S}\cdot\Phi(S,K)\cdot e^{i\frac{y-a_2}{b_1-b_3}}\cdot\frac{(-1)^{j-k}}{(b_1-b_3)^{j-k}}\sum_{S=1}^{j-k}\frac{\left[i(y-a_2)\right]^S}{S!(b_1-b_3)^S}\Phi(S,j-K)\right\}\right\},$$

where $\Phi(S,l)=\sum_{r=0}^{S-1}(-1)^r C_S^r\frac{(S-r+l-1)!}{(S-r-1)!}$.

We note that, using the coupling operation of operators (operator complexes), it is possible to consider more complex cases of spectra. Using the Cayley transformation, a non-stationary random sequence can be reconstructed from the spectrum, in which $\dim\overline{(I-T^*T)H}=1$, where $H=l_2$ is the Hilbert space, $T\in[l_2,l_2]$ is the operator that acts in this space, and the discrete spectrum μ_j is contained within the unit circle of the complex plane. Indeed, from the general picture

$$\xi_n=T^n\xi_0=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\lambda^n(T-\lambda I)^{-1}\xi_0 d\lambda,\qquad T\in[l_2,l_2],$$

assuming for simplicity that $\xi_0=e$, where *e* is the channel element of the operator T $\left(I-T^*T=\langle\cdot,e\rangle e\right)$ and considering that the resolvent $(T-\lambda I)^{-1}$ can be represented as $(T-\lambda I)^{-1}=\frac{1}{1-\lambda}\left(\hat{A}-iI\right)\left(\hat{A}-i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}I\right)^{-1}$ and accordingly $e=\sqrt{2}\left(\hat{A}^*-iI\right)^{-1}g_{\hat{A}}$, $g_{\hat{A}}=(1,1,\ldots)$, where $\hat{A}$ the Kelly transformation of the operator *T*.

This transformation is a non-self-adjoint operator $\dim\overline{2\operatorname{Im}\hat{A}l_2}=1$ with and spectrum $\lambda_j=i\frac{1+\mu_j}{1-\mu_j},\left|\mu_j\right|<1$, which is located in the upper half-plane. Using the triangular model of the operator $\hat{A}$ to $(\xi_n)_k$ finally obtain:

$$\left(\xi_n\right)_k = \left(T^n e\right)_k = -\frac{\sqrt{1-\left|\mu_k\right|^2}}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\lambda^n}{\lambda-\mu_k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1-\lambda\overline{\mu_j}}{1-\mu_j}\frac{\left|\lambda_j\right|}{\overline{\lambda_j}}d\lambda .$$

Using similar considerations, it is possible to restore a non-stationary sequence in the case when its spectrum is located on a continuous arc of the unit circle:

$$\xi_n\left(x\right) = T^n \xi_0\left(x\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2\pi i}\oint \lambda^n \left(\frac{\xi_0\left(x\right)}{\left(1-\lambda\right)\alpha\left(t\right)-i\left(1+\lambda\right)} e^{-i\int\limits_0^x \frac{(1-\lambda)dt}{(1-\lambda)\alpha(t)-i(1+\lambda)}}\right)d\lambda,$$

where $T \in \left[L^2_{[0,l]}, L^2_{[0,l]}\right]$, $\alpha\left(x\right)$ nondecreasing real-valued function.

Having model images for $e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0$ or $\hat{A}^n\hat{\xi}_0$, it is easy to calculate the corresponding correlation functions.

Prospects for further research information technologies.

The authors consider it promising to restore non-stationary sequences for various cases of the spectrum of the non-self-adjoint operator *A*. At the same time, it should be borne in mind that the spectral expansions will have a deep physical meaning if these expansions represent a superposition of discrete or continuous internal states of oscillators with complex frequencies and non-correlated amplitudes. In the case of an infinite spectrum, one should expect the appearance of members in the spectral distribution that correspond to significantly new states compared to stationary random processes.

These states, in turn, correspond to distributed systems: generalized strings generated by equations with partial derivatives of the form

$$a_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b_0\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ or } \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \alpha u = 0 .$$

Let us emphasize that the construction of the correlation theory of random fields can be connected with the theory of systems of doubly permutable operators. This will make it possible to study random fields by methods analogous to the correlation theory of random sequences and processes.

Conclusions.

Thus, in this article, the task of reconstructing non-stationary random processes (sequences) by spectrum is solved. Different cases of the spectrum of the non-self-adjoint operator *A* are considered, namely, the case of the discrete spectrum and the case of the continuous spectrum, which is located on a finite segment of the real axis, which is the region of values of a real-valued nondecreasing function $a\left(x\right)$. The cases $a(x) = 0$, $a(x) = a_0$, $a(x) = x$ and $a(x)$ – piecewise-constant function are considered. It should be noted that model images for non-stationary random processes and sequences ($e^{it\hat{A}}\hat{\xi}_0$ or $\hat{A}^n\hat{\xi}_0$) can be used to build specific models of non-stationary random processes that can be applied to interpret statistical data.

Список літератури

1. Колмогоров А.Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве // Бюл. МГУ, 1941. – 2, №6. – С.1 – 40.
2. Козуляев П.А. К вопросу об экстраполяции стационарных процессов // Доклады Академии Наук СССР, 1947. – Том LVI. – №9. – С. 903 – 905.
3. Козуляев П.А. К проблемам интерполяции и экстраполяции стационарных последовательностей // Доклады Академии Наук СССР, 1941. – Том XXX. – №1. – С. 13 – 17.
4. Яглом А.М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. –Том 1. – Вып.5(51), – С.3 – 168.
5. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы / М.: Физмат. гиз. 1963. – 284с.
6. Лившиц М.С. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Матем. сб. 19(61):2. – 1946. – С. 239 –262.
7. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах / Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. – 160с.
8. Аров Д.З. Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сибирский матем. журнал. – 1979. – Т.20. – №2. – С.211 – 228.
9. Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов // М.: Наука, 1969. – 287с.
10. Бродский М.С., Лившиц М.С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы // Успехи матем. наук. –-1958. – Т.8. – Вып.1(79). – С.3 – 85.
11. Ваксман Л.Л. Гармонический анализ многопараметрических полугрупп сжатий, Харьковский госуниверситет, Харьков: 1979. – 167с. (Рукопись депонирована в ВИНИТИ №3991 – 80деп.).
12. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов // М., 1977, 654с.
13. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов // М., 1965, 448с.
14. Золотарев В.А. Об открытых системах и характеристических функциях коммутирующих систем операторов, Харьковский гос. ун-т, Харьков, 1979 (рукопись депонирована в ВИНИТИ № 85 – 79 деп.).
15. Золотарев В.А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов. ДАН Арм. ССР, ХП, № 3, 136 – 140.
16. Поляцкий В.Т. О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов // ДАН СССР, 113 "1957", С. 756 – 759.
17. Сахнович Л.А. Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром // Труды Моск. матем. общества, 19, 1968, С. 211 – 270.
18. J. Bunce The Joint Spectrum of Commuting Nonnormal operators, Proc. Amer, math, soc. 29 (1971), 499 – 505.
19. J. L. Taylor A joint spectrum for several commuting operators, J. Funct. Anal. 6 (1970), 172 – 191.
20. Когут Е.А., Черемская Н.В., Янцевич А.А. О представлении резольвент вольтерровых операторов // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – К., Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип.1 (17). – С.99 – 101.
21. Назиров З.Ф., Черемська Н.В., Янцевич А.А. Про один клас неоднорідних випадкових полів // Вісник Національног технічного університету „Харківський політехнічний університет”. Збірник наукових праць. Тематичний випуск Математичне моделювання в техниці та технологіях. Харків: НТУ”ХПІ”. 2011. №13.– С.146-153.

22. Назиров З.Ф., Черемська Н.В., Янцевич А.А. Лінійні перетворення дискретних випадкових полів // Вісник Національног технічного університету „Харківський політехнічний університет”. Збірник наукових праць. Тематичний випуск Математичне моделювання в техниці та технологіях. Харків: НТУ”ХПІ”. 2011. №42.– С.144-154.
23. Prishchenko O.P., Chernogor T.T. Analysis of opportunities of analytical method of optimization in chemical technology // Вісник НТУ «ХПІ» Серія: Інноваційні дослідження у наукових роботах студентів. – Харків : НТУ «ХПІ», 2020. – №5 (1359). – с. 71 – 77.
24. Пріщенко О. П., Черногор Т. Т. Використання тензорів при аналізі особливостей фізичних властивостей твердих тіл // Вісник НТУ «ХПІ» Серія: Інноваційні дослідження у наукових роботах студентів. – Харків : НТУ «ХПІ», 2020. – №6 (1360). – с. 42 – 48.
27. Prishchenko O.P., Chernogor T.T. Application of elements of studying the function of one variable when solving chemical problems // Вісник НТУ «ХПІ» Серія: Інноваційні дослідження у наукових роботах студентів. – Харків : НТУ «ХПІ», 2021. – №1 (1361). – с. 30 – 35.
28. Пріщенко О. П., Черемська Н. В., Черногор Т. Т. Побудова математичних моделей за допомогою методів кореляційного і регресійного аналізу // Вісник НТУ «ХПІ» Серія: Інноваційні дослідження у наукових роботах студентів. – Харків : НТУ «ХПІ», 2021. – №62 (1362). – с. 29 – 36.
29. Пріщенко О. П., Черемська Н. В. Реконструкція гаусовських випадкових функцій за даними спектру // Вісник НТУ «ХПІ» Серія: Математичне моделювання в техниці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2021. – № 1-2 (2). – с. 97 – 103.

References (transliterated)

1. Kolmogorov A.N. Statsionarnyye posledovatel'nosti v gil'bertovom prostranstve Byul. MGU, 1941. 2, №b. p.1–40.
2. Kozulyayev P.A. K voprosu ob ekstrapolyatsii statsionarnykh protsessov // Doklady Akademii Nauk SSSR, 1947. – Tom LVI. – №9. – pp. 903 – 905.
3. Kozulyayev P.A. K problemam interpolyatsii i ekstrapolyatsii statsionarnykh posledovatel'nostey // Doklady Akademii Nauk SSSR, 1941. – Tom XXX. – №1. – S. 13 – 17.
4. Yaglom A.M. Vvedeniye v teoriyu statsionarnykh sluchaynykh funktsiy // UMN. – 1952. –Tom 1. – Vyp.5(51), – pp. 3–168.
5. Rozanov YU.A. Statsionarnyye sluchaynyye protsessy / M.: Fizmat. giz. 1963. – 284 p.
6. Livshits M.S. Ob odnom klasse lineynykh operatorov v gil'bertovom prostranstve // Matem. sb. 19(61):2. – 1946. – S. 239–262.
7. Livshits M.S., Yantsevich A.A. Teoriya operatornykh uzlov v gil'bertovykh prostranstvakh / Khar'kov: Izd-vo KHGU, 1971. – 160 p.
8. Arov D.3. Passivnyye lineynyye statsionarnyye dinamicheskiye sistemy // Sibirskiy matem. zhurnal. – 1979. – T.20. – №2. – pp.211–228.
9. Brodskiy M.S. Treugol'nyye i zhordanovy predstavleniya lineynykh operatorov // M.: Nauka, 1969. – 287 p.
10. Brodskiy M.S., Livshits M.S. Spektral'nyy analiz nesamosopryazhennykh operatorov i promezhutochnyye sistemy // Uspekhi matem. nauk. – 1958. – T.8. – Vyp.1(79). – pp .3 – 85.
11. Vaksman L.L. Garmonicheskiy analiz mnogoparametricheskikh polugrupp szhatiy, Khar'kovskiy gosuniversitet, Khar'kov: 1979. – 167 p. (Rukopis' deponirovana v VINITI №3991 – 80dep.).
12. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Vvedeniye v teoriyu sluchaynykh protsessov // M., 1977, 654 p.
13. Gokhberg I.TS., Kreyn M.G. Vvedeniye v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov // M., 1965, 448 p.
14. Zolotarev V.A. Ob otkrytykh sistemakh i kharakteristicheskikh funktsiyakh kommutiruyushchikh sistem operatorov, Khar'kovskiy gos. un-t, Khar'kov, 1979 (rukopis' deponirovana v VINITI № 85 – 79 dep.).
15. Zolotarev V.A. O treugol'nykh modelyakh sistem dvazhdy perestanovochnykh operatorov. DAN Arm. SSR, KHP, № 3, 136–140.
16. Polyatskiy V.T. O privedenii k treugol'nomu vidu kvaziunitarnykh operatorov // DAN SSSR, 113, 1957, pp. 756–759.
17. Sakhnovich L.A. Dissipativnyye operatory s absolyutno nepreryvnym spektrom // Trudy Mosk. matem. obshchestva, 19, 1968, pp. 211 – 270.
18. J. Bunce The Joint Spectrum of Commuting Nonnormal operators, Proc. Amer, math, soc. 29 (1971), pp. 499 – 505.
19. J. L. Taylor A joint spectrum for several commuting operators, J. Funct. Anal. 6 (1970), pp. 172 – 191.
20. Kohut E.A., Cheremskaya N.V., Yantsevych A.A. O predstavlenyy rezol′vent vol′terrovykh operatorov // Krayovi zadachi dlya dyferentsial′nykh rivnyan′: Zb. nauk. pr. – K., In-t matematyky NAN Ukrayiny, 1998. Vyp.1 (17). pp. 99–101.
21. Nazyrov Z.F., Cherems′ka N.V., Yantsevych A.A. Pro odyn klas neodnoridnykh vypadkovykh poliv // Visnyk Natsional′noh tekhnichnoho universytetu „Kharkivs′kyy politekhnichnyy universytet”. Zbirnyk naukovykh prats′. Tematychnyy vypusk Matematychne modelyuvannya v tekhnytsi ta tekhnolohiyakh. Kharkiv: NTU”KhPI”. 2011. №13. – pp.146-153.
22. Nazyrov Z.F., Cherems′ka N.V., Yantsevych A.A. Liniyni peretvorennya dyskretnykh vypadkovykh poliv // Visnyk Natsional′noh tekhnichnoho universy-tetu „Kharkivs′kyy politekhnichnyy universytet”. Zbirnyk naukovykh prats′. Tematychnyy vypusk Matematychne modelyuvannya v tekhnytsi ta tekhno-lohiyakh. Kharkiv: NTU”KhPI”. 2011. №42. – pp.144–154.
23. Prishchenko O.P., Chernogor T.T. Analysis of opportunities of analytical method of optimization in chemical technology // Visnik NTU «KhPI» Seriya: Innovacijni doslidzhennya u naukovih robotah studentiv. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2020. – №5 (1359). – pp. 71 – 77.
24. Prishchenko O. P., Chernogor T. T. Vikoristannya tenzoriv pri analizi osoblivostej fizichnih vlastivostej tverdih til // Visnik NTU «HPI» Seriya: Innovacijni doslidzhennya u naukovih robotah studentiv. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2020. – №6 (1360). – pp. 42 – 48.
25. Prishchenko O.P., Chernogor T.T. Application of elements of studying the function of one variable when solving chemical problems // VIsnik NTU «KhPI» Seriya: Innovatsiyni doslIdzhennya u naukovih robotah studentIv. – Harkiv : NTU «KhPI», 2021. – №1 (1361). – pp. 30 – 35.
26. Prischenko O. P., Cheremska N. V., Chernogor T. T. Pobudova matematichnih modeley za dopomogoyu metodIv korelyatsIynogo i regresiynogo analIzu // Visnik NTU «HPI» Seriya: Innovatsiyni doslidzhennya u naukovih robotah studentiv. – Harkiv : NTU «HPI», 2021. – #62 (1362). – pp. 29 – 36.
27. Prischenko O. P., Cheremska N. V. Rekonstruktsiya gausovskih vipadkovih funktsiy za danimi spektru // Visnik NTU «HPI» Seriya: Matematichne modelyuvannya v tehnitsi ta tehnologiyah. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2021. – # 1–2 (2). – pp. 97 – 103.

Надійшла (received) 05.07.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Пріщенко Ольга Петрівна (Прищенко Ольга Петровна, Prishchenko Olga Petrivna) – старший викладач кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна; ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0530-2131; e-mail: priolga2305@gmail.com

Черемська Надія Валентинівна (Черемская Надежда Валентиновна, Cheremskaya Nadezhda Valentinovna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна; тел.: (050) 225-15-44; e-mail: cheremskaya66@gmail.com

Бухкало Світлана Іванівна (Бухкало Светлана Ивановна, Bukhkalo Svetlana Ivanovna) – кандидат технічних наук, професор кафедри інтегрованих технологій, процесів та апаратів, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1389-6921; e-mail: bis.khr@gmail.com

О. П. ПРІЩЕНКО, Н. В. ЧЕРЕМСЬКА, С. І. БУХКАЛО

ПРИКЛАДИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗА ДАНИМИ СПЕКТРУ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Відомо, що стаціонарний випадковий процес зображується у вигляді суперпозиції гармонічних коливань із дійсними частотами та некорельованими амплітудами. При дослідженні нестаціонарних процесів природною є наявність зростаючих або згасаючих коливань. При цьому виникає задача побудови алгоритмів, які дозволяли би конструювати з елементарних нестаціонарних випадкових процесів широкі класи нестаціонарних процесів. Природним узагальненням поняття спектру нестаціонарного випадкового процесу є перехід від дійсного спектру у випадку стаціонарності до комплекснозначного або нескінченнократного спектру в нестаціонарному випадку. Також виникає проблема опису в межах кореляційної теорії випадкових процесів, у яких спектр не має аналогів у випадку стаціонарних випадкових процесів, а саме, точка спектру дійсна, але у відповідного оператора в операторному зображенні ця точка нескінченної кратності, а також, коли сам спектр комплексний. Реконструкція за комплексним спектром нестаціонарної випадкової функції є досить актуальною проблемою як у теоретичному, так і в прикладному аспектах. В статті розроблена процедура реконструкції випадкового процесу, послідовності, поля за спектром для гаусівських випадкових функцій. Порівняно до стаціонарного випадку, тут відкриваються більш широкі можливості, наприклад, побудова нестаціонарного випадкового процесу з дійсним спектром, який має нескінченну кратність та який може бути розподіленим на всьому скінченному відрізку дійсної осі. Наявність такого спектру приводить, на відміну від випадку стаціонарного випадкового процесу, до появи нових складових у спектральному розкладі випадкових функцій, які відповідають внутрішнім станам "струн", тобто породжуються розв'язками систем рівнянь у часткових похідних гіперболічного типу. Автори вважають перспективними відновлення нестаціонарних послідовностей для різних випадків спектра несамоспряженого оператора A тому, що спектральні розклади є суперпозицією дискретних або континуальних внутрішніх станів осциляторів із комплексними частотами та некорельованими амплітудами і тому матимуть глибокий фізичний зміст.

Ключові слова: інформаційні технології, математичне моделювання, кореляційна функція, трикутні моделі операторів, нестаціонарні випадкові послідовності і процеси, спектр оператора, ранг нестаціонарності, квазіранг.

О. П. ПРИЩЕНКО, Н. В. ЧЕРЕМСКАЯ, С. И. БУХКАЛО

ПРИМЕРЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦИИ ПО ДАННЫМ СПЕКТРА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Известно, что стационарный случайный процесс представляется в виде суперпозиции гармонических колебаний с вещественными частотами и некоррелированными амплитудами. При исследовании нестационарных процессов естественным является наличие возрастающих или убывающих колебаний. При этом возникает задача построения алгоритмов, позволяющих конструировать из элементарных нестационарных случайных процессов широкие классы нестационарных процессов. Естественным обобщением понятия спектра нестационарного случайного процесса является переход от вещественного спектра в случае стационарности к комплекснозначному или бесконечнократоному спектру в нестационарном случае. Также возникает проблема описания в рамках корреляционной теории случайных процессов, у которых спектр не имеет аналогов в случае стационарных случайных процессов, а именно, точка спектра вещественная, но у соответствующего оператора в операторном представлении эта точка бесконечной кратности, а также, когда сам спектр комплексный. Реконструкция по комплексному спектру нестационарной случайной функции является достаточно актуальной проблемой как в теоретическом и в прикладном аспектах. В статье разработана процедура реконструкции случайного процесса, последовательности, поля по спектру для гауссовских случайных функций. По сравнению со стационарным случаем, тут открываются более широкие возможности, например, построение нестационаого случайного процесса с вещественным спектром, который имеет бесконечную кратность и может быть распределен на всем конечном отрезке вещественной оси. Наличие такого спектра приводит, в отличие от случая стационарного случайного процесса, к появлению новых составляющих в спектральном разложении случайных функций, которые соответствуют внутренним состояниям "струн", то есть порождаются решениями систем уравнений в частных производных гиперболического типа. Автори считают перспективными восстановление нестационарных последовательностей для разных случаев спектра несамосопряженного оператора A потому, что спектральные разложения являются суперпозицией дискретных или континуальных внутрнних состояний осцилляторов с комплексными частотами и некоррелированными амплитудами и потому имеют глубокий физический смысл.

Ключевые слова: информационные технологии, математическое моделирование, корреляционная функция, треугольные модели операторов, нестационарные случайные последовательности и процессы, спектр оператора, ранг нестационарности, квазиранг.